

令和4年度

数 学

問 題 冊 子

[1]  $n$  を自然数とする.

- (1)  $n(n-1)$  が 4 の倍数ならば、「 $n$  が 4 の倍数である」か、あるいは「 $n-1$  が 4 の倍数である」かのいずれかであることを示せ.
- (2)  $n$  が 2桁の自然数であるとする.  $n(n-1)$  が 100 の倍数ならば、「 $n$  が 4 の倍数で、 $n-1$  が 25 の倍数である」か、あるいは「 $n$  が 25 の倍数で、 $n-1$  が 4 の倍数である」かのいずれかであることを示せ.
- (3)  $n$  が 4桁の自然数であるとする.  $n^2$  の下 4桁が  $n$  と一致するような  $n$  を求めよ.

[2]  $\alpha$  を 0 でない複素数とする. 以下,  $i$  は虚数単位とする.

- (1)  $\alpha = a + bi$  ( $a, b$  は実数) と表すとき,  $z^2 = \alpha$  をみたす複素数  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) について,  $x^2$  と  $y^2$  をそれぞれ  $a$  と  $b$  を用いて表せ. さらに  $\alpha = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$  のときの  $z$  を求めよ.
- (2)  $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と極形式で表すとき,  $z^2 = \alpha$  をみたす 2 つの複素数を  $r$  と  $\theta$  を用いて表せ. また,  $\alpha$  が正の実数でもないとき,  $z^2 = \alpha$  をみたす 2 つの複素数と  $\alpha$  の 3 点を頂点とする三角形の面積  $S$  を  $r$  と  $\theta$  を用いて表せ.

[3] (1) 関数  $f(x) = (x^2 - x)^3$  の増減, 極値, グラフの凹凸, および変曲点を調べて, そのグラフの概形をかけ.

(2) (1) を参考にして, 関数  $g(x) = |x^2 - x|^3$  のグラフの概形をかけ.

[4] (1)  $\cos \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ.

(2) 等式

$$\sin 2x \cos \left( \frac{\pi}{6} - x \right) - \frac{1}{2} \cos x = \cos x \sin(2x - \alpha)$$

が  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  で成り立つような  $\alpha$  を求めよ. ただし,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  とする.

(3) 関数

$$f(x) = \sin 2x \cos \left( \frac{\pi}{6} - x \right) - \frac{1}{2} \cos x \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

について,  $f(\beta) = 0$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) をみたす  $\beta$  を求め,  $\int_0^\beta f(x) dx$  を求めよ.